-EXERCICE 13.4-

• ENONCE :

« Effet Zeeman »

• On considère un électron de masse m et de charge –e, élastiquement lié au noyau par une force de rappel : $\vec{F} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM}$ (O est le centre du noyau et M est la position de l'électron).

• L'atome est placé dans un champ magnétique uniforme et permanent : $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

• On suppose que l'on a $\dfrac{eB}{m\omega_0} \ll 1$, et on limitera les calculs à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

• On négligera l'action de la pesanteur.

1) Que représente la grandeur ω_0 ?

2) Ecrire les équations du mouvement dans le référentiel d'étude (lié au noyau) supposé galiléen, en utilisant un repère cartésien ; en déduire z(t).

3) On cherche des solutions x(t) et y(t) à variations temporelles sinusoïdales, et l'on pose :

$$x(t) = \Re\{\underline{X}\exp(i\omega t)\} \quad \text{et} \quad y(t) = \Re\{\underline{Y}\exp(i\omega t)\}$$

Montrer qu'il n'existe que 2 pulsations possibles ω_1 et ω_2, et les calculer en fonction de ω_0, e, m et B .

A quoi correspondent ces 2 pulsations ?

4) Pour chacune d'elles, déterminer le rapport $\dfrac{\underline{Y}}{\underline{X}}$; en déduire la forme de la trajectoire dans le plan xOy.

• **CORRIGE :** « Effet Zeeman »

1) Dans le référentiel lié au noyau, supposé galiléen, le PFD appliqué à l'électron (en l'absence de champ magnétique) s'écrit :

$m\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \vec{0}$: le système correspond à un oscillateur spatial de **pulsation propre** ω_0.

• Cette pulsation correspond également à une **pulsation de résonance** du mouvement de l'électron, dans le cas où il serait « excité » par un champ électrique harmonique : l'énergie du champ excitateur serait alors absorbée $\Rightarrow$ la pulsation ω_0 est également associée aux **niveaux d'absorption** de l'atome considéré.

2) En présence du champ magnétique, le PFD s'écrit maintenant :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM} - e\vec{v}\wedge\vec{B}\,, \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B\vec{e}_z$$

• En projection dans un repère cartésien, il vient :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - eB\times\dfrac{dy}{dt} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y + eB\times\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -m\omega_0^2 z \end{cases} \Rightarrow \boxed{z(t) = Z_0\cos(\omega_0 t + \varphi)} \qquad (Z_0 \text{ et } \varphi \text{ dépendant des C.I})$$

3) En notation complexe, on a : $\dfrac{d\underline{x}}{dt} = i\omega\underline{x}$ et $\dfrac{d^2\underline{x}}{dt^2} = -\omega^2\underline{x} \Rightarrow$ après simplification par $\exp(i\omega t)$, les équations en x(t) et y(t) précédentes deviennent :

$$\begin{cases} -m\omega^2\underline{X} = -m\omega_0^2\underline{X} - i\omega eB\underline{Y} \\ -m\omega^2\underline{Y} = -m\omega_0^2\underline{Y} + i\omega eB\underline{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(\omega_0^2-\omega^2)\underline{X} + i\omega eB\underline{Y} = 0 & (1) \\ -i\omega eB\underline{X} + m(\omega_0^2-\omega^2)\underline{Y} = 0 & (2) \end{cases}$$

• Ce système linéaire et **homogène** admet des solutions autres que (0,0) à la seule condition que son **déterminant soit nul**, ce qui se traduit par :

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2 - \frac{\omega^2e^2B^2}{m^2} = 0 \Rightarrow \left(\omega_0^2-\omega^2+\frac{\omega eB}{m}\right)\left(\omega_0^2-\omega^2+\frac{\omega eB}{m}\right) = 0 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega eB}{m} - \omega_0^2 = 0$$

• Le discriminant de chaque équation du second degré vaut :

$\Delta = \dfrac{e^2B^2}{m^2} + 4\omega_0^2 \simeq (2\omega_0)^2$, compte tenu de l'approximation proposée par l'énoncé ; en retenant les 2 seules solutions positives, il vient :

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0 - \frac{eB}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{eB}{2m}}$$

$\Rightarrow$ en présence de $\vec{B}$, les fréquences propres de l'électron, ainsi que les niveaux d'absorption de l'atome, sont légèrement modifiés : c'est « **l'effet Zeeman** ».

4) En reportant les expressions **non simplifiées** de ω_1 et ω_2 dans la relation (1) par exemple, on obtient :

♦ pour $\omega = \omega_1$: $\boxed{\dfrac{\underline{Y}}{\underline{X}} = i}$ $\Rightarrow$ si $x(t)$ est de la forme $x(t) = A\cos\omega_1 t$, alors $y(t) = -A\sin\omega_1 t$

$\Rightarrow$ $x^2(t) + y^2(t) = A^2$ $\Rightarrow$ dans le plan xOy, la trajectoire de la particule est un **CERCLE**, décrit dans le sens **horaire** (à t=0, la particule se trouve en (A ; 0) et en $\omega_1 t = \pi / 2$, la particule se trouve en (0 ; -A), où A est supposé positif).

♦ pour $\omega = \omega_2$: $\boxed{\dfrac{\underline{Y}}{\underline{X}} = -i}$ $\Rightarrow$ cette fois, si $x(t)$ est de la forme $x(t) = A\cos\omega_2 t$, alors $y(t) = A\sin\omega_2 t$ $\Rightarrow$ la trajectoire est toujours un **cercle**, mais décrit dans le sens **trigonométrique**.